

Муниципальное общеобразовательное учреждение  
средняя общеобразовательная школа №5  
имени 63-го Угличского пехотного полка  
Угличского муниципального района

Утверждена  
приказом по школе № 51/01-09  
от «28» мая 2024 г  
Директор МОУ СОШ № 5  
*Лема* Пятницына Н.Л.



**Дополнительная общеобразовательная  
общеразвивающая программа  
«Математическая школа»**

Срок реализации – 3 года  
Направленность – техническая  
Возраст обучающихся – 10-14 лет

**Автор- составитель:**  
Агеенко Светлана Николаевна,  
учитель математики

г. Углич,  
2024 год

## Содержание

Пояснительная записка .....	3
Планируемые результаты освоения предмета .....	4
Учебный план .....	5
Содержание программы .....	6
Методическое обеспечение .....	16
Информационные источники .....	17
Календарно-тематическое планирование .....	18
Оценивание достигнутых результатов .....	23

## 1. Пояснительная записка

Программа «Математическая школа» направлена на изучение дополнительных разделов математики и развитие разнообразных математических компетенций. Особое внимание в каждом тематическом разделе уделяется изучению общих методов, подходов, идей решения математических задач.

В настоящее время математика является неотъемлемой частью личной и профессиональной компетенции, лежит в основе логического и аналитического стиля мышления, а также представляет собой неотъемлемый компонент многовековой общечеловеческой культуры. Важной идеей является многоуровневость, позволяющая решать различные образовательные задачи и выбирать тот уровень дополнительного образования, который соответствует возможностям, интересам и текущему уровню образованности школьника. Одним из компонентов практической реализации данной идеи является организация математических занятий со школьниками 5–8 классов в рамках широкой сети математического объединения.

**Актуальность программы** заключается в том, что развитие математических компетенций школьников, их специфических логических и алгоритмических навыков, умственной (в том числе, математической) культуры будет наиболее эффективным при соответствующей поддержке, которую школьник получает в системе дополнительного образования. Поэтому предложенная программа в первую очередь должна обеспечивать доступность дополнительного математического образования, возможность развертывания локальных математических объединений, создания на базе этих объединений условий для развития школьников, поддержки их интереса к математике и другим естественнонаучным дисциплинам и областям знания.

**Цель программы** – создание условий для творческого, интеллектуального развития, воспитания общей и математической культуры, формирования профессиональных компетенций, создания базы для более эффективного изучения предметов естественнонаучного цикла.

Для достижения поставленной цели необходимо решение **задач**:

- формировать и развивать у учащихся интереса к математике и в целом к естественнонаучным знаниям; активизация познавательной деятельности;
- углублять и расширять знания учащихся по математике;
- формировать математический язык и математический аппарата как средства описания и исследования окружающего мира;
- развивать способности глубоко, систематически и самостоятельно разбираться в сложных математических проблемах;
- формировать и развивать нестандартное, основанное на глубоких научных понятиях мышления;

- формировать и закреплять представления об основных принципах научности и доказательности в математике;
- развивать критичность мышления, самодисциплины, настойчивости, целеустремленности;
- развивать алгоритмическое и эвристическое мышление, необходимое для полноценного функционирования в современном обществе и являющихся основой профессиональных математических компетенций;
- развивать элементы алгоритмической культуры, пространственные представления, интуицию, математический кругозор.

Программа курса «Математическая школа» рассчитана на 102 часа (один учебный час в неделю в течение трех лет). Предполагает занятия и для обучающихся с ОВЗ.

## **2. Планируемые результаты**

### **1-й год обучения**

#### ***Обучающийся научится:***

- развивать интерес к математике, активизировать познавательную деятельность, интерес к продолжению дополнительных систематических занятий математикой;
- формировать математические компетенции, овладение новыми идеями и методами решения математических задач;
- развивать первичные навыки научной математической деятельности;
- повышать общий интеллектуальный и математический уровень обучающихся;
- развивать математическую интуицию, логическое мышление, формировать и развивать математическую культуру;
- формировать умение адекватного и эффективного применения изученных методов и принципов в решении практических задач, а также умение представления достигнутых результатов в сочетании с их обсуждением.

### **2-й год обучения**

#### ***Обучающийся научится:***

- развивать интерес к математике, активизация познавательной деятельности, интерес к продолжению дополнительных систематических занятий математикой;
- формировать математические компетенции, овладение новыми идеями и методами решения математических задач;
- развивать первичные навыки научной математической деятельности;
- повышать общий интеллектуальный и математический уровень обучающихся;
- развивать математические интуиции, логическое мышление, формировать и развивать математическую культуры;
- формировать умение адекватного и эффективного применения изученных

методов и принципов в решении практических задач, а также умение представления достигнутых результатов в сочетании с их обсуждением

### 3-й год обучения

#### **Обучающийся научится:**

- развивать интерес к математике, активизировать познавательную деятельность, интерес к продолжению дополнительных систематических занятий математикой
- формировать математические компетенции, овладение новыми идеями и методами решения математических задач;
- развивать первичные навыки научной математической деятельности;
- повышать общий интеллектуальный и математический уровень обучающихся;
- развивать математическую интуицию, логическое мышление, формировать и развивать математическую культуру;
- формировать умения адекватного и эффективного применения изученных методов и принципов в решении практических задач, а также умения представления достигнутых результатов в сочетании с их обсуждением.

### 3. Учебный план

#### 1-й год обучения

№	Тема	Теория	Практика	Итого
1	Общие принципы решения арифметических задач	2	4	6
2	Логика	2	2	4
3	Четность и чередование	2	2	4
4	Делимость и остатки	1	1	2
5	Принцип Дирихле	1	1	2
6	Клетчатые доски и таблицы	1	2	3
7	Алгоритмы и операции	1	2	3
8	Множества и основы комбинаторики	1	2	3
9	Введение в геометрию	1	2	3
10	Математические соревнования	0	4	4
Итого		12	22	34

#### 2-й год обучения

№	Тема	Теория	Практика	Итого
1	Общие принципы решения математических задач	2	4	6
2	Текстовые задачи	2	2	4
3	Основы теории чисел: делимость и остатки	2	2	4
4	Арифметические неравенства	1	1	2
5	Теория игр	1	1	2
6	Основы теории графов	2	2	4
7	Комбинаторика	2	2	4
8	Основы теории чисел: делимость и остатки	2	2	4

9	Математические соревнования	0	4	4
Итого		14	20	34

### 3-й год обучения

№	Тема	Теория	Практика	Итого
1	Общие принципы решения математических задач	2	4	6
2	Теория чисел	2	2	4
3	Геометрия	2	2	4
4	Комбинаторика	1	1	2
5	Алгебра	1	1	2
6	Неравенства	1	2	3
7	Метод математической индукции	1	2	3
8	Теория графов	1	2	3
9	Текстовые задачи	1	2	3
10	Математические соревнования	0	4	4
Итого		12	22	34

## 4. Содержание программы

### 1-й год обучения

#### *Тематический раздел 1. Общие принципы решения математических задач*

Учащиеся знакомятся с основными (общими) принципами решения математических задач, осознают необходимость обоснования математических утверждений, приобретают опыт образного и предметно-манипулятивного конструирования. В ходе лекционных занятий учащиеся осваивают основные логические схемы рассуждения, закрепляя их при решении практических задач с устным изложением решений.

В ходе практических занятий учащимся предлагаются задачи на полный перебор случаев, возможностей, комбинаций, на конструирование примеров и контрпримеров, на логический вывод и логическое обоснование выдвигаемых гипотез. Общие принципы решения задач иллюстрируются при решении логических практических задач на работу с истинными и ложными высказываниями, утверждениями. Допускается рассмотрение текстовых задач, типичных (по структуре) для стандартного школьного курса – на движение, на работу, на подсчет объектов, – но с необычной формулировкой или возможной оригинальной идеей решения.

#### *Тематический раздел 2. Логика*

Повторяются и обсуждаются общие принципы решения математических задач, подчеркивается необходимость обоснования математических утверждений, актуализируются понятия частного и общего случая, закрепляется понимание различий между доказательством и проверкой на частных примерах. Формируются навыки работы с основными логическими конструкциями, такими как следствие, равносильность, необходимость, достаточность, существование, всеобщность. Логические

понятия, связки, схемы рассуждения, общие принципы решения задач и доказательств, полученные на лекционных занятиях, закрепляются при решении практических задач с устным или письменным изложением решений.

На практических занятиях предлагаются задачи на логический вывод и логическое обоснование выдвигаемых гипотез, полный перебор комбинаций истинности и ложности высказываний. Общие свойства операций над высказываниями и правила корректного логического вывода закрепляются при решении и обсуждении логических задач.

### *Тематический раздел 3. Четность и чередование*

Изучаются простейшие свойства делимости (на примере делимости на 2), понятие четности рассматривается на наглядных примерах (как способность к разбиению на пары, возможность чередования элементов). Обсуждаются свойства четных и нечетных чисел (сумма двух чисел одинаковой четности четна, сумма двух чисел разной четности нечетна, произведение четно тогда и только тогда, когда четным является один из множителей; переход к более сложным свойствам – четность или нечетность суммы нечетного количества нечетных слагаемых, обобщенные понятия – числа одинаковой и разной четности).

Знание свойств закрепляется при решении задач на соответствия, на разбиения на пары, на чередования. Разбираются простейшие задачи на раскраску, на разбиение чисел. В ходе решения и обсуждения задач закрепляется понимание разницы между частными и общими случаями, примером и доказательством.

### *Тематический раздел 4. Делимость и остатки*

В ходе занятий по данной теме учащиеся исследуют основные свойства делимости (арифметические свойства делимости на одно число – сумма и разность чисел одинаковой одномодульной делимости, произведение, в котором один из множителей делится на данное число), закрепляется навык поиска делителей натурального числа, исследуются основные свойства простых и составных чисел, делимости на простое число.

При решении задач развиваются навыки поиска общих делителей чисел, приобретаются умения использования разложения на простые множители для анализа делимости чисел (поиска делителей, в 6 классе можно уделить внимание поиску общих делителей, общих кратных). Учащиеся повторяют простейшие признаки делимости, закрепляют навык их использования для эффективного поиска делителей числа и разложения натурального числа на простые множители.

В группе можно уделить внимание основной теореме арифметики о существовании и единственности разложения числа на простые множители, продемонстрировать ее применение при решении задач на доказательство (для 5 класса достаточно будет просто ее сформулировать и проиллюстрировать на примере задач). Осваивается умение обоснования признаков делимости на различные числа, формируются навыки поиска

контрпримеров к неверным признакам. Полученные навыки закрепляются при решении практических задач.

#### *Тематический раздел 5. Принцип Дирихле*

Учащиеся получают представление о простом и обобщенном принципе Дирихле, отрабатывают умение преобразовывать интуитивные предпосылки в форму строгого математического доказательства. Дополнительно повторяются общие методы и схемы доказательств: доказательство от противного, оценка и пример; обсуждаются возможности неконструктивных доказательств существования объектов (на примере решения задач на доказательство существования чисел с определенными свойствами), развивается умение различать условие задачи (посылку) и заключение (вывод), формируется понимание отличия интуитивных выводов и суждений от строгих доказательств. В ходе изучения данной темы повторяются свойства делимости и остатков, которые органично используются как этапы доказательств и решений задач.

#### *Тематический раздел 6. Клетчатые доски и таблицы*

На примере таблиц и клетчатых досок рассматриваются различные оптимизационные задачи (например, нахождение максимального или минимального количества фишек или каких-либо иных объектов, при котором выполняется некоторое заданное свойство) – при этом рассматриваются примеры задач на построение точных оценок (задачи типа «оценка плюс пример» – синтез логического обоснования и конструирования). Допустимо рассмотреть различные варианты расположения шахматных фигур или новых фигур, «по мотивам шахматных».

Также в группах 5-6 или 6 классов на примере некоторых задач с таблицами и досками возможно рассмотрение некоторой разновидности идеи инварианта – независимости значения некоторой величины от способа подсчета (например, по строкам и столбцам), а также ознакомить с идеей окраски таблиц и клетчатых досок для рассмотрения простейших инвариантов, связанных с окраской.

#### *Тематический раздел 7. Алгоритмы и операции*

Учащиеся на примере алгоритмических задач на взвешивание и переливание приобретают опыт образного и предметно-манипулятивного конструирования. На примере заданий на построение наиболее оптимального (по количеству действий) алгоритма рассматриваются идеи сравнения трудоемкости алгоритмов, важные при дальнейшем изучении информатики и программирования. В том случае, если учащиеся уже рассмотрели до этого идеи инвариантов (в соответствующем тематическом учебном модуле), допускается изучение возможности или невозможности получения необходимого результата с помощью допустимых операций.

#### *Тематический раздел 8. Множества и основы комбинаторики*

Учащимся вводится понятие множества, описываются общие свойства множеств, возможные варианты задания (описания) множеств, вводятся

основные операции над множествами. Допустимо (особенно в группах шестиклассников) отдельно сделать упор на формальном способе записи множеств и операций над ними (теоретико-множественная нотация). В качестве наглядной иллюстрации введенных понятий используются диаграммы Эйлера-Венна; учащиеся самостоятельно строят такие диаграммы при решении задач на подсчет элементов в множествах.

При изучении данного раздела (в части, относящейся к основам теории множеств) учащимся вводятся те понятия, которые в дальнейшем используются практически во всех разделах математики. В практической части данного тематического раздела учащимся демонстрируется необходимость полного рассмотрения вариантов в переборных задачах, обсуждаются общие черты некоторых переборных задач и задач на подсчет количества комбинаций. Обсуждаются способы подсчета комбинаций без их непосредственного нахождения. Особое внимание уделяется изучению правил сложения и умножения вероятностей, формируется умения правильно применять данные законы, что закрепляется при решении практических задач.

#### *Тематический раздел 9. Введение в геометрию*

Учащиеся кратко, во многом на интуитивном уровне, знакомятся с некоторыми геометрическими понятиями и свойствами. При решении задач на разрезание учащиеся по большей части работают самостоятельно, задачи предлагаются в порядке последовательного усложнения. Сравнение площадей многоугольников рассматривается с помощью идеи равносоставленности.

Неравенство треугольника иллюстрируется интуитивной геометрической интерпретацией («путь по прямой короче, чем по ломаной (не по прямой)»). Возможно решение оптимизационных задач с использованием неравенства треугольника, в этом случае особое внимание уделяется наличию в решении двух обязательных составляющих: оценки и примера.

#### *Тематический раздел 10. Математические соревнования*

Допускается разбор материала темы (проведение математических соревнований) в течение года. Учащиеся последовательно знакомятся с правилами личных и командных математических соревнований в процессе участия в них.

### **2-й год обучения**

#### *Тематический раздел 1. Общие принципы решения математических задач*

Учащиеся повторяют с общие (общематематические) принципы решения математических задач, закрепляют понимание важности обоснования математических утверждений, приобретают опыт образного и предметно-манипулятивного конструирования. Большое внимание уделяется решению задач на перебор случаев (ситуаций), выдвижение предположений, логический вывод и приведение к противоречию. Предлагаются задачи на полный перебор ситуаций, на конструирование примеров и контрпримеров,

на логический вывод и логическое обоснование выдвигаемых гипотез.

### *Тематический раздел 2. Текстовые задачи*

Данный раздел во многом дополняет повторение общих принципов решения задач: предлагаются задачи без явно выраженной общей идеи решения, в которых применяются общематематические идеи, методы, подходы. На занятиях с шестиклассниками или в группах с большим количеством новых участников рекомендуется рассмотрение текстовых задач, типичных (по структуре) для стандартного школьного курса – на движение, на работу, на подсчет объектов. В любом случае минимизировать количество задач, в которых предполагается совершенно стандартный ход или алгоритм решения.

### *Тематический раздел 3. Основы теории чисел: делимость и остатки*

Учащиеся повторяют основные понятия, связанные с делимостью целых чисел, закрепляют понимание базовых свойств делимости. Особое внимание следует обратить на разложение составных чисел на простые множители, на основную теорему арифметики (о существовании и единственности разложения на простые множители). В старших группах (в первую очередь обучающимся по варианту тематического плана №3) можно предложить основную идею строгого доказательства данной теоремы, а также продемонстрировать, как из неё вытекают основные свойства делимости.

При решении задач учащиеся повторяют простейшие признаки делимости, закрепляют навык их использования для эффективного поиска делителей числа и разложения натурального числа на простые множители. Закрепляются навыки поиска общих делителей чисел, предлагается алгоритм Евклида для нахождения НОД, в группе семиклассников желательно провести строгое обоснование алгоритма.

Свойства остатков сначала демонстрируются на арифметических примерах, после этого важно провести строгое доказательство используемых свойств, на их примере также продемонстрировав и структуру доказательства теоретико-числовых свойств, и способ записи доказательств. Также важно уделить внимание свойству цикличности остатков при возведении целых чисел в степень, а также изучению свойств остатков от деления квадратов, кубов и других степеней натуральных чисел на 3, 4 и прочие делители.

С группой семиклассников также допустимо рассмотреть основные понятия, связанные с позиционными системами счисления, предложить один из возможных алгоритмов перевода чисел из десятичной системы счисления в другую позиционную систему счисления и обратно.

### *Тематический раздел 4. Арифметические неравенства*

На примере задач на сравнение целых чисел и арифметических выражений учащимся демонстрируются основные свойства алгебраических неравенств (в первую очередь транзитивность, а также возможность складывать или перемножать неравенства при соблюдении некоторых условий). При изучении свойств неравенств полезно также продемонстрировать или попросить учащихся построить контрпримеры,

показывающие недопустимость переноса некоторых свойств равенств на неравенства (например, для демонстрации недопустимости вычитания неравенств), а также невыполнимость некоторых арифметических свойств неравенств при неполном соблюдении условий для выполнения соответствующего свойства.

#### *Тематический раздел 5. Теория игр*

Учащиеся по предыдущему году обучения уже знакомы с понятием математической антагонистической игры, выигрышной стратегии, правильной игры. Поэтому при работе с данным тематическим разделом приоритетнее уделить особое внимание изучению методов целенаправленного поиска выигрышных стратегий.

В первую очередь можно рассмотреть серию задач на поиск симметричных стратегий (как в прямом – геометрическом смысле, так и в переносном – в виде дополнения объектов до определенного количества). Интересно обратить внимание на задачи, где при незначительном изменении условия перестает работать уже найденная симметричная стратегия, зато возникает другой вид симметрии и соответствующая выигрышная стратегия. Особенно важно обращать внимание учащихся на необходимость обоснования двух важных составных частей найденной стратегии: возможности для игрока действительно совершать ходы, предусмотренные выбранной стратегией (избегая при этом ошибки, когда соперник неявно «подыгрывает» игроку, возможно мотивируя это «наиболее удобным» вариантом сделать ответный ход).

В качестве достаточно универсального средства поиска выигрышных стратегий следует обратить внимание учащихся на понятие выигрышной позиции и метод анализа выигрышных «с конца». Наиболее наглядно данный метод демонстрируется на примере игровых задач на шахматной доске.

#### *Тематический раздел 6. Основы теории графов*

Обсуждается эффективность представления связанной с задачей системы в схематической форме с помощью графов. На примерах иллюстрируется способ представления объектов задачи и взаимосвязей между ними в виде вершин и ребер графа, обсуждается возможность существования общих способов решения конкретных задач при их интерпретации в виде графовых моделей.

Вводятся основные определения теории графов (вершины, ребра, смежность, инцидентность, путь). Введенные понятия развернуто иллюстрируются на конкретных примерах, отрабатывается умение идентифицировать объекты с вершинами и рассматриваемые связи с ребрами, интерпретировать задачу в терминологии теории графов.

#### *Тематический раздел 7. Комбинаторика*

Учащимся демонстрируется необходимость полного рассмотрения вариантов в переборных задачах, обсуждаются общие черты некоторых переборных задач и задач на подсчет количества комбинаций. Обсуждаются способы подсчета комбинаций без их непосредственного нахождения.

Особое внимание уделяется изучению правил сложения и умножения вероятностей, формируется умения правильно применять данные законы. Способ подсчета перестановок предварительно демонстрируется на простейших задачах с использованием полного перебора, после чего на задачах с большим количеством элементов обсуждается неконструктивный способ подсчета количества комбинаций, в результате выводится общая формула подсчета количества перестановок, навык использования которой закрепляется при решении задач.

*Тематический раздел 8. Основы теории чисел: делимость и остатки*

Повторяется основная идея доказательства математических утверждений с помощью инвариантов, закрепляется навык поиска инвариантов в изменяющейся системе, выбора из них необходимого для решения поставленной задачи. Решение задач на инварианты, связанные с делимостью и остатками, также полезно для закрепления соответствующих понятий, свойств и закономерностей в тематическом блоке «Основы теории чисел». При решении задач на исследование инвариантов, связанных с раскраской, учащиеся повторяют различные виды раскрасок и разбиения на группы (шахматные раскраски, раскраски в три или большее количество цветов, диагональные раскраски), приобретают опыт применения идеи инварианта в различных ситуациях.

В сильных группах можно явно или неявно ввести понятие полуинварианта (как монотонно меняющейся характеристики) с закреплением данного понятия через решение соответствующих задач.

*Тематический раздел 12. Математические соревнования*

Проведение математических соревнований в течение года. Учащиеся последовательно знакомятся с правилами личных и командных математических соревнований в процессе участия в них.

### **3-й год обучения**

*Тематический раздел 1. Общие принципы решения математических задач*

Общематематические принципы применяются для решения широкого класса задач из различных разделов математики. Для закрепления навыков использования общих методов предлагаются задачи на перебор ситуаций, метод доказательства от противного, оптимизационные задачи типа «оценки плюс пример», сочетающие в себе обоснование ограничений и конструирование примеров.

Принцип Дирихле, изучаемый ранее в рамках самостоятельного тематического раздела, включается в число общематематических методов и применяется для широкого класса математических задач по алгебре, теории чисел, комбинаторики. Принцип крайнего, основанный на рассмотрении «крайних» объектов (самого большого или самого маленького числа из предложенного набора, наиболее удаленные точки, фигуру с самой большой

площадью, человека с наибольшим числом знакомых, и так далее) сразу вводится как универсальный метод, которых может быть эффективно применен при решении задач различной тематики.

### *Тематический раздел 2. Теория чисел*

Учащиеся повторяют основные понятия, связанные с делимостью целых чисел, освоенные в течение первых двух лет обучения. Особое внимание следует уделить повторению свойств остатков при арифметических операциях над числами, уделяя особое внимание структуре доказательства теоретико-числовых свойств через перебор остатков, цикличность остатков при возведении в степень, а также с использованием свойств остатков от деления квадратов, кубов и других степеней натуральных чисел на 3, 4 и прочие делители. Удобно будет раз брать с учащимися способ записи доказательств данных свойств через построение таблиц остатков.

В том случае, если при освоении программы 2 года обучения с учащимися не разбиралась или разбиралась недостаточно подробно тема, связанная с позиционными системами счисления, будет полезно разобрать ее сейчас: разобрать особенности позиционных систем счисления, алгоритмы перевода чисел из десятичной системы счисления в другую позиционную систему счисления и обратно.

Закрепляются навыки поиска общих делителей чисел, предлагается алгоритм Евклида для нахождения НОД. Если в предыдущий год алгоритм Евклида не обосновывался, необходимо строго доказать его, продемонстрировав основные свойства общих делителей чисел. Со школьниками любого возраста будет интересно разобрать геометрическую интерпретацию алгоритма Евклида (нахождение наиболее длинного отрезка, укладывающегося целое число раз в два заданных). Навыки нахождения НОД с помощью алгоритма Евклида полезно закрепить решением задач на обоснование несократимости дробей заданного вида.

В качестве введения в основные методы решения уравнений в целых числах (равно как и в само понятие уравнения в целых числах) рекомендуется предложить метод разложения на множители и перебора делителей. Обоснование отсутствия решения уравнения в целых числах также можно продемонстрировать на примере анализа остатков от деления (например, через обоснование того, что левая и правая часть уравнения дают при делении на какое-то число разные множества остатков).

### *Тематический раздел 3. Геометрия*

Конкретный набор тематических подразделов при изучении геометрии на занятии математического объединения очень сильно зависит от возрастного состава соответствующей учебной группы. В группе семиклассников в начале учебного года (первый модуль данного тематического блока) можно сделать упор на неравенстве треугольника, а в дальнейшем ориентироваться на текущую программу школьного курса планиметрии. В этом случае можно предлагать либо подразделы по уже

пройденной в средней школе тематике, либо двигаясь с некоторым опережением (в этом случае необходимые факты можно предложить доказывать самостоятельно). В группах восьмиклассников большая часть необходимого фактического материала должна быть изучена на школьных уроках геометрии, поэтому таких явных требований к порядку тематических подразделов нет.

В любом случае необходимо сделать упор на строгих математических доказательствах свойств фигур (здесь уместнее будут задачи на доказательство, нежели на вычисление длин, площадей и углов). При доказательстве свойств на занятиях полезно вводить дополнительные ограничения на используемую фактологическую базу (например, предлагать задачи на доказательство, но не разрешать использовать признаки подобия). Также важное внимание следует уделить геометрической технике: закреплению навыков счёта углов, умений использовать свойства равных треугольников и замечательных линий треугольников.

### *Тематический раздел 3. Комбинаторика*

В первую очередь необходимо повторить с учащимися правила сложения и умножения вероятностей, в дальнейшем сделать упор на классических комбинаторных схемах. Если данный тематический раздел вызывает затруднения у обучающихся, изучение схем комбинаторного выбора необходимо предварить вычислением соответствующих комбинаций с помощью правила умножения или с помощью структурированного перебора. Например, при изучении размещений с повторениями или без повторений можно с помощью правила произведения решить несколько задач на нахождение количества способов выбора упорядоченного подмножества из заданного множества, а затем ввести общую формулу для числа размещений. При введении формулы для числа сочетаний рекомендуется сначала вычислить количество соответствующих размещений (количество способов выбора упорядоченного набора) 2 или 3 элементов, а потом обсудить, какое лишнее количество раз при этом будет подсчитана каждая комбинация из выбранных элементов, если порядок теперь не учитывать. Аналогично и с остальными комбинаторными схемами.

Обоснование свойств биномиальных коэффициентов (чисел сочетаний) имеет смысл параллельно проводить доказательство двумя подходами: алгебраическим (используя явную формулу для числа сочетаний) и комбинаторным (рассматривая соответствующую формулу как количество способов выбора объектов определенным образом). Интересным приложением изученных свойств может быть описание построения треугольника Паскаля (школьникам также можно предложить сопоставить построенные элементы треугольника Паскаля с вычисленными по формуле).

### *Тематический раздел 4. Алгебра*

Этот тематический раздел, с одной стороны, является дополнительным к школьному курсу алгебры за 7 или за 7-8 класс, однако должен обеспечить

необходимую техническую базу для других разделов программы 3 года обучения. Сформированный навык доказательства алгебраических тождеств в дальнейшем потребуются в ходе решения уравнений в целых числах, проведении индукционных переходов в разделе, посвященном математической индукции. Разложение на множители и выделение полного квадрата помимо этого будут основными инструментами при доказательстве числовых неравенств.

Также отметим, что данную тему удобно использовать как своеобразный переход от привычного изложения в рамках изучения школьной программы к разнообразным разделам дополнительной образовательной программы.

#### *Тематический раздел 5. Неравенства*

Основные свойства алгебраических неравенств (транзитивность, алгебраические свойства – условия, при которых сохраняются или меняются знаки неравенства при выполнении арифметических операций) будет удобно повторить на примере сравнения числовых арифметических выражений. Для доказательства алгебраических неравенств рекомендуется продемонстрировать подходы, связанные с разложением выражения на множители и перебором вариантов расстановки знаков. Семиклассникам будет полезно ознакомиться также с методом доказательства неравенств и нахождения наибольших/наименьших значений, основанным на выделении полного квадрата в алгебраическом выражении.

#### *Тематический раздел 6. Теория графов*

Актуализируются знания основных понятий теории графов (вершины, ребра, степени вершин, связность, пути, циклы), а также базовые свойства (в том числе лемма о рукопожатиях). Введенные ранее понятия развернуто иллюстрируются на конкретных примерах, отрабатывается умение идентифицировать объекты с вершинами и рассматриваемые связи с ребрами, интерпретировать задачу в терминологии теории графов. Вводится понятие изоморфизма графов. Обращается внимание на топологические свойства графов – в данном контексте под этим понимается независимость ключевых свойств графов от их представления в виде чертежа. Предлагаются задания на построение графов по заданному набору степеней вершин или на обоснование того, что таких графов нет. Также полезными будут задания на перечисление попарно неизоморфных графов для небольшого количества вершин, а также построение изоморфизма между графами.

При изучении путей и циклов в графе рекомендуется предложить задачи на обоснование связности графов, обоснование наличия путей определенного вида (например, циклов или путей, проходящих по всем вершинам). Здесь же можно ознакомить с понятием эйлерова пути и эйлерова цикла – ввести эти понятия можно через задачи, в которых предлагается нарисовать фигуру из линий, не отрывая карандаша от бумаги. Теорему Эйлера о существовании эйлерова пути или цикла в группах семиклассников

можно не доказывать, обосновав лишь необходимость условия на степени вершин (можно это сделать, используя соображения типа «сколько раз заходим в промежуточную вершину, столько раз и должны выйти из неё»). Более старшим школьникам можно рассказать (или предложить придумать самостоятельно) алгоритм построения эйлерова обхода. Также в группах восьмиклассников можно (при наличии времени) разобрать понятие дерева, изучить основные свойства деревьев (опять же, на основе задач). Понятие дерева вполне можно рассмотреть на примере связной системы дорог без циклов или связной системы дорог с минимальным количеством отрезков пути (на том же примере рассматриваются альтернативные определения дерева, показывается их равносильность, вводится понятие остовного дерева).

#### *Тематический раздел 7. Текстовые задачи*

Данный раздел во многом дополняет повторение общих принципов решения задач, поэтому за счет проведения занятий по решению текстовых задач можно расширить соответствующий тематический раздел. В то же время рекомендуется уделить внимание решению задач на средние значения, иллюстрирующие различные трактовки (определения) средних, их общие и специфические свойства. Здесь же будет интересно рассмотреть задачи на движение, обращая внимание на особенности вычисления средней скорости при неравномерном движении. Текстовые задачи на проценты также могут быть связаны с темой

«Теория чисел» – в том случае, если параметры задачи являются целыми числами, то решение иногда может быть сведено к рассмотрению уравнений в целых числах.

#### *Тематический раздел 8. Математические соревнования*

Допускается разбор материала темы (проведение математических соревнований) в течение года. Учащиеся последовательно знакомятся с правилами личных и командных математических соревнований в процессе участия в них.

### **5. Методическое обеспечение**

**Кадровое обеспечение:** учителя математики

**Материально-техническое обеспечение:**

- цифровая лаборатория для школьников Центра «Точки роста»
- ноутбуки физико-технологической лаборатории Центра «Точки Роста»
- интерактивная панель Центра «Точки Роста».

#### **Сборники задач**

1. Арнольд В. И. Задачи для детей от 5 до 15 лет – М.: МЦНМО, 2007.
2. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. – М., Наука, 1975.
3. Блинков А. Д., Горская Е. С., Гуровиц В. М. Московские математические регаты. – М.: МЦНМО, 2007.
4. Бугаенко В. О. Турниры им. Ломоносова. – М.: МЦНМО, 1998.
5. Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи всесоюзных математических

олимпиад. Часть 1. – М.: Бюро Квантум, 2010.

6. Горбачёв Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2004.
7. Математические бои. Материалы XIII областного турнира. Методическое пособие. – Ярославль: ГУ ЦОШ «Олимп», 2007
8. Математические бои. Материалы XIV областного турнира. Методическое пособие. – Ярославль: ГУ ЦОШ «Олимп», 2008
9. Математические турниры им. А. П. Савина. Составитель А.В. Спивак. – М.: Бюро Квантум, 2006
10. Произволов В. В. Задачи на вырост – М.: МИРОС, 1995.

#### *Учебно-методическая литература*

- Блинков А. Д. Классические средние в арифметике и в геометрии. – М.: МЦНМО, 2012
- Вентцель Е. С. Элементы теории игр. – М.: Физматгиз, 1961.
- Верещагин Н. К., Шень А. Х. Начала теории множеств. – М.: МЦНМО, 2002.
- Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. – М.: МЦНМО, 2005.
- Гарднер М. Математические чудеса и тайны. – М.: Наука, 1978.
- Генкин С. А., Интенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.
- Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах. – М.: Наука, 1972.
- Евдокимов М. А. От задачек к задачам. – М.: МЦНМО, 2004.
- Екимова М. А., Кукин Г. П. Задачи на разрезание. – М., МЦНМО, 2002.
- Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. – М.: МЦНМО, 1997.
- Кноп К. А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. - М.: МЦНМО, 2011
- Козлова Е. Г. Сказки и подсказки. – М., МЦНМО, 2004.
- Кордемский Б. А. Математическая смекалка. – М., ГИФМЛ, 1958.
- Кэрролл Л. Логическая игра. – М.: Наука, 1991.
- Левин А. Ю. Что такое комбинаторика. – М.: «Квант», 1999 г., № 5, 6
- Муштари Д. Х. Подготовка к математическим олимпиадам. – Казань, 1990.
- Перельман Я. И. Занимательная алгебра. – М.: Наука, 1974.
- Спивак А. В. Математический праздник. – М.: МЦНМО, 1995.
- Толпыго А. К. Инварианты. – «Квант», 1976, №12.

#### **6. Информационные источники**

<http://newschool.yar.ru/14-proekty/211-regionalnyj-proekt-yaroslavskaya-matematicheskaya-shkola>

- Дополнительная образовательная программа математических объединений: Первый год обучения. – Ярославль, 2014. – 39 с.

- Дополнительная образовательная программа математических объединений: Второй год обучения. – Ярославль, 2014. – 38 с.

- Дополнительная образовательная программа математических объединений: Третий год обучения. – Ярославль, 2014. – 39 с.

## 7. Календарно-тематическое планирование

### 1 год обучения

№ п/п	Форма занятия	Кол-во часов	Тема занятия	Дата (план)	Дата (факт)
1.	Лекция	1	Общие принципы решения арифметических задач. Вводное занятие.	05.09-09.09	
2.	Практика	1	Ситуации, их анализ в математических задачах.	12.09-16.09	
3.	Лекция	1	Логический вывод в математических задачах.	19.09-23.09	
4.	Практика	1	Предположения, метод от противного в математических задачах.	26.09-30.09	
5.	Лекция	1	Перебор возможностей в математических задачах .	3.10-07.10	
6.	Практика	1	Примеры и контрпримеры в математических задачах.	10.10-14.10	
7.	Лекция	1	Высказывания, их истинность и ложность. Операции над высказываниями.	17.10-21.10	
8.	Лекция	1	Логический вывод, предположения, противоречия, метод от противного. Полный перебор возможностей.	24.10-28.10	
9.	Практика	1	Метод предположений.	07.11-11.11	
10.	Практика	1	Правила логического вывода. Упорядочение перебора вариантов: деревья вариантов, таблицы истинности.	14.11-18.11	
11.	Лекция	1	Чередование.	21.11-25.11	
12.	Лекция	1	Четные и нечетные числа.	28.11-02.12	
13.	Практика	1	Свойства четных и нечетных чисел.	05.12-09.12	
14.	Лекция	1	Разбиение на пары, соответствия.	12.12-16.12	
15.	Практика	1	Делимость и делители, кратность. Простые и составные числа.	19.12-30.12	

			Разложение на простые множители.		
16.	Лекция	1	Общие делители, взаимно простые числа. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10.	09.01-13.01	
17	Лекция	1	Принцип Дирихле: общее представление. Обобщенный вариант принципа Дирихле.	16.01-20.01	
18	Практика	1	Принцип Дирихле в арифметических задачах.	23.01-27.01	
19	Лекция	1	Примеры и контрпримеры в таблицах	30.01-03.02	
20	Практика	1	Задачи на оптимизацию на клетчатых досках	06.02-10.02	
21	Практика	1	Комбинаторные задачи на клетчатых досках Идеи инвариантов для клетчатых досок и таблиц	13.02-17.02	
22	Практика	1	Задачи на взвешивание	20.02-24.02	
23	Лекция	1	Процессы и операции	27.02—03.03	
24	Практика	1	Задачи на переливание	06.03-10.03	
25	Лекция	1	Понятие множества. Элементы множества. Задание множеств. Равенство множеств.	13.03-17.03	
26	Практика	1	Теоретико-множественная нотация. Объединение, пересечение, дополнение множеств. Диаграммы Эйлера-Венна.	20.03-24.03.	
27	Практика	1	Понятие варианта, комбинации, основные способы их перебора. Дерево возможных вариантов. Правила сложения и умножения вариантов.	03.04-07.04	
28	Лекция	1	Основные геометрические понятия.	10.04-14.04	
29	Практика	1	Разрезания. Равносоставленность фигур.	17.04-21.04	
30	Практика	1	Длины, расстояния, площади. Неравенство треугольника.	24.04-28.04	
31	Практика	1	Ознакомление с правилами математических олимпиад, аукционов, карусели, регаты, абак.	02.05-05.05	

32	Практика	1	Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров.	08.05-12.05	
33	Практика	1	Проведение соревнований.	15.05-19.05	
34	Практика	1	Проведение соревнований.	22.05-26.05	

## 2 год обучения

№ п/п	Форма занятия	Кол-во часов	Тема занятия	Дата (план)	Дата (факт)
1.	Лекция	1	Общие принципы решения математических задач. Вводное занятие	05.09-09.09	
2.	Лекция	1	Полный перебор возможностей в математических задачах.	12.09-16.09	
3.	Практика	1	Примеры и контрпримеры в математических задачах.	19.09-23.09	
4.	Практика	1	Предположения, получение противоречия в математических задачах..	26.09-30.09	
5.	Практика	1	Метод доказательства от противного в математических задачах.	3.10-07.10	
6.	Практика	1	Общие принципы решения математических задач (обобщение темы)	10.10-14.10	
7.	Лекция	1	Текстовые задачи на движение	17.10-21.10	
8.	Лекция	1	Текстовые задачи на работу	24.10-28.10	
9.	Практика	1	Текстовые задачи на подсчет объектов	07.11-11.11	
10.	Практика	1	Текстовые задачи. Нестандартные подходы к решению.	14.11-18.11	
11.	Лекция	1	Делимость и делители, кратность. Простые и составные числа. Разложение на простые множители.	21.11-25.11	
12.	Лекция	1	Основная теорема арифметики. Общие делители. Взаимно простые числа	28.11-02.12	
13.	Практика	1	Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Алгоритм Евклида.	05.12-09.12	

14.	Практика	1	Остатки от деления. Арифметические свойства остатков. Основы систем счисления.	12.12- 16.12	
15.	Лекция	1	Сравнение чисел	19.12- 30.12	
16.	Практика	1	Числовые неравенства, их основные свойства	09.01- 13.01	
17-	Лекция	1	Стратегии, выигрышная стратегия, правильная игра. Игры на клетчатой доске.	16.01- 20.01	
18	Практика	1	Симметричные стратегии. Выигрышные позиции, поиск и анализ выигрышных позиций с конца.	23.01- 27.01	
19	Лекция	1	Графы как математическая модель.	30.01- 03.02	
20	Лекция	1	Основные понятия теории графов.	06.02- 10.02	
21	Практика	1	Связность графов, компоненты связности.	13.02- 17.02	
22	Практика	1	Степени вершин и закономерности, связанные с ними.	20.02- 24.02	
23	Лекция	1	Комбинаторика.	27.02— 03.03	
24	Лекция	1	Основные правила подсчета количества комбинаций.	06.03- 10.03	
25	Практика	1	Схемы комбинаторного выбора: перестановки размещения, сочетания.	13.03- 17.03	
26	Практика	1	Свойства перестановок и сочетаний.	20.03- 24.03.	
27	Лекция	1	Делимость и делители, кратность. Простые и составные числа. Разложение на простые множители.	03.04- 07.04	
28	Лекция	1	Основная теорема арифметики. Общие делители. Взаимно простые числа.	10.04- 14.04	
29	Практика	1	Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Алгоритм Евклида.	17.04- 21.04	
30	Практика	1	Остатки от деления. Основы систем счисления.	24.04- 28.04	
31	Практика	1	Ознакомление с правилами математических олимпиад,	02.05- 05.05	

			аукционов, карусели, регаты, абаки.		
32	Практика	1	Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров.	08.05-12.05	
33	Практика	1	Проведение соревнований.	15.05-19.05	
34	Практика	1	Проведение соревнований.	22.05-26.05	

### 3 год обучения

№ п/п	Форма занятия	Кол-во часов	Тема занятия	Дата (план)	Дата (факт)
1.	Лекция	1	Вводное занятие. Общие принципы решения математических задач.	05.09-09.09	
2.	Лекция	1	Общие принципы решения математических задач. Виды решений.	12.09-16.09	
3.	Практика	1	Общие принципы решения математических задач. Задачи типа «оценка плюс пример»	19.09-23.09	
4.	Практика	1	Общие принципы решения математических задач. Принцип Дирихле	26.09-30.09	
5.	Практика	1	Общие принципы решения математических задач. Введение в принцип крайнего	3.10-07.10	
6.	Практика	1	Общие принципы решения математических задач. Примеры и контрпримеры.	10.10-14.10	
7.	Лекция	1	Теория чисел. Свойства остатков от деления. Арифметика остатков.	17.10-21.10	
8.	Лекция	1	Теория чисел. Системы счисления.	24.10-28.10	
9.	Практика	1	Теория чисел. Наибольший общий делитель, алгоритм Евклида.	07.11-11.11	
10.	Практика	1	Теория чисел. Уравнения в целых числах.	14.11-18.11	
11.	Лекция	1	Неравенство треугольника Признаки равенства треугольника	21.11-25.11	
12.	Лекция	1	Свойства треугольника и параллелограмма	28.11-02.12	
13.	Практика	1	Дополнительные построения	05.12-09.12	
14.	Практика	1	Площади и её свойства	12.12-16.12	
15.	Лекция	1	Правила сложения и умножения вариантов. Классические комбинаторные схемы	19.12-30.12	

16.	Практика	1	Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.	09.01-13.01	
17	Лекция	1	Доказательство тождеств.	16.01-20.01	
18	Практика	1	Решение уравнений: разложение на множители, замена переменной, выделение полного квадрата.	23.01-27.01	
19	Лекция	1	Числовые (арифметические) неравенства. Основные свойства неравенств.	30.01-03.02	
20	Практика	1	Разложение на множители для доказательства неравенств.	06.02-10.02	
21	Практика	1	Выделение полных квадратов для доказательства неравенств.	13.02-17.02	
22	Лекция	1	Классическая схема математической индукции. От последовательного конструирования до индукции.	20.02-24.02	
23	Практика	1	Индукция для доказательства тождеств и неравенства.	27.02—03.03	
24	Практика	1	Индукция в графах.	06.03-10.03	
25	Лекция	1	Основные понятия теории графов.	13.03-17.03	
26	Практика	1	Изоморфизм графов. Пути и циклы в графе. Теорема Эйлера.	20.03-24.03.	
27	Практика	1	Деревья и их свойства.	03.04-07.04	
28	Лекция	1	Текстовые задачи на средние значения.	10.04-14.04	
29	Практика	1	Текстовые задачи на проценты.	17.04-21.04	
30	Практика	1	Текстовые задачи без общей идеи.	24.04-28.04	
31	Практика	1	Ознакомление с правилами математических олимпиад, аукционов, карусели, регаты, абаки, домино, крестиков-ноликов.	02.05-05.05	
32	Практика	1	Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров.	08.05-12.05	
33	Практика	1	Проведение соревнований	15.05-19.05	
34	Практика	1	Проведение соревнований	22.05-26.05	

## 8. Оценивание достигнутых результатов

В процессе изучения материала используются как традиционные формы обучения, так и самообразование, саморазвитие учащихся посредством

самостоятельной работы с информационным и методическим материалом. Предполагаются следующие формы организации обучения:

- индивидуальная, групповая, коллективная;
- взаимное обучение, самообучение, саморазвитие.

Эффективность обучения отслеживается следующими формами контроля:

- текущий контроль,
- итоговый контроль.

Программой предусмотрено проведение лекционных, практических занятий, выполнение контрольных работ, проведение математических соревнований. Текущий контроль усвоения материала осуществляется на основе проверочных, контрольных работ, тестов. Предусматривается дифференцированный итоговый контроль: итоговая контрольная работа, очный зачет, математические олимпиады различного уровня.









